№38 Лекция
Тақырыбы:
Туынды және оның физикалық, геометриялық мәні. Натурал көрсеткішті дәрежелік функцияның туындысы

Жоспар:
1. Функцияның туындысы және дифференциалы
 1.1 Функция туындысына келтірілетін есептер
 1.2 Функцияның туындысы
 1.3 Функцияның дифференциалы және оның геометриалық мағынасы
2. Есептер шығару

1.**Функцияның туындысы және дифференциалы**

Бұл параграфта математикадағы ең маңызды ұғымдалдың бірі – функция туындысы ұғымын қарастырамыз. Бұл ұғым алғаш рет XVII ғасырда бірқалыпты емес қозғалыста болатын денелердің лездік жылдамдығын табу, кез келген қисыққа жанама жүргізу және т.с.с. есептерді шығару барысында пайда болды. Сондықтан функция туындысы түсігін лездік жылдамдықты анықтау мен жанама жөніндегі есептерді шешуден бастаймыз.

1.1. Функция туындысына келтірілетін есептер

1-мысал.
Айталық , қандай да бір *M* материалдық нүкте түзу сызық бойымен қозғалатын болсын. Онда *t* уақытының әрбір мәніне *M* материадық нүктесінің жүріп өткен жолының ұзындығын сәйкес қоялық. Сонда бұл сәйкестік бірмәнді болғандықтан, белгілі бір функцияны анықтайды, яғни жүрілген жол *s* –ті *t* уақытқа тәуелді функция ретінде қарастыруға болады: $s = f(t)$

1-сурет

Осыдан *f* функционалдық тәуелділікті біле отырып, *M* материалдық нүктесінің *t* уақытта қаншалықты жол жүргеннін табуға болады (1-сурет). *f(t) M* материалдық нүктесінің қозғалыс загдылығын береді. Егер *M* материалдық нүкте бірқалыпты қозғалыста болса, яғни ол бірдей уақыт аралықтарында ұзындықтары бірдей жол жүріп өтетін болса, онда бұл қозғалыстың жылдамдығы тұрақты болады. Ал егер дене бірқалыпты емес қозғалыста болса, онда оның жылдамдығы тұрақты болмай, өзгеріп отырады. Мысалы, дененің еркін түсу қозғалысының жылдамдығы тұрақты емес. Сондықтан мұндай қозғалыстар ретінде лездік жылдамжық ұғымын қарастырады. Бұл ұғымды қарастырудың алдында дененің белгілі бір уақыт аралығындағы орташа жылдамдығы ұғымын қарастырайық.

Анықтама.
Айталық , материалдық нүкте s=f(t) заңымен қозғалысын. Егер $f(t_0)=s_0$, $f(t_1)=s_1$ *болса, онда*

$$V_{орт} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$$

өрнегін t_0*-ден* t_1*-ге дейінгі уақыт аралығындағы қозғалыстың орташа жылдамдығы деп атаймыз.*

Қозғалыстың әр түрлі кезеңдеріндегі жылдамдықтары әр түрлі болуы айқын. Мысалы, автомобильдің жылдамдығы жөнінде сөз қозғайтын болсақ, онда оның белгілі бір уақыт аралығында жүріп өткен жолындағы орташа жылдамдығын аламыз . Бірақ автомобиль жолдың кейбір жерлерінде қозғалысын баяулатуы, ал кейбір жерлерінде қозғалысын баяулатуы, ал кейбір жерлерінде үдетуі мүмкін. Сонымен, жалпы алғанда, әр түрлі уақыт аралықтарында автомобильдің орташа жылдамдықтары әр түрлі болады.

Осы сияқты дененің еркін түсуі $s=\frac{gt^2}{2}$ формуласымен анықталатынын білеміз. Мұнда s жолы метрмен, t уақыты секундпен өлшенеді және g=9,5 м/сек ^{2}.

Сонда дене алғашқы 1 секундта s (1) = $\frac{g*1}{2}$=4,5м жол жүреді. Ал t_0=5сек аралығында дене s (t_1)- s(t_0)= $\frac{g*25}{2}$ - $\frac{g*16}{2}$ = 44,1м жол жүреді. Сондықтан дененің еркін түсу қоғалысы бірқалыпты қоғалыс болмайды.

Техника мен жаратылыстанудың көптеген мәселелерін шешуде бізге дененің орташа жылдамдығы емес, оның лездік жылдамдығын білу қажет болады. Енді осы түсінікті анықтайық . Айталық , дене s= f(t) заңдылығымен қозғалатын болсын. t = t_0 нүктесінде уақытқа Δt өсімшесін беріп, t_0 мен $t_0+\Delta t$ уақыттары аралығындағы дененің орташа жылдамдығын табайық:

$$V_{орт}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

Онда дененің t=t_0 уақытындағы *лездік жылдамдығы v(t_0)* деп, оның t_0 мен $t_0+\Delta t$ уақыттары аралығындағы орташа жылдамдығының $\Delta t\to 0$ ұмтылғандығы шегін айтамыз:

$$V(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

немесе Δs = $f(t_0+\Delta t)$- f (t_0) болатының ескерсек,

$$V(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

тегін аламыз, яғни $t=t_0$ уақытындағы дененің лездік жылдамдығы s= f(t) функциясының t_0 нүктесіндегі өсімшіне қатынасының $\Delta t\to 0$ ұмтылғандағы шегімен анықталады.

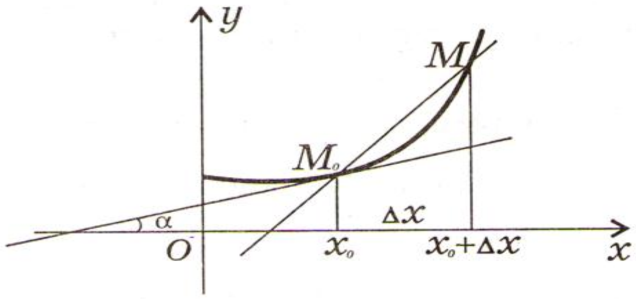
Мысалы, дененің еркін түсу қозғалысының $t=t_0$ уақыт мезетіндегі лездік жылдамдығын анықтайық:

$$V(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{g(t_0+\Delta t)^2}{2}-\frac{gt_0{}^2}{2}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t_0{}^2+2t_0\Delta t+\Delta t^2-t_0{}^2)}{2\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0} g\,(t_0+0{,}5\Delta t\ \Delta t)=gt_0.$$

2-мысал.

$y=f(x)$ функциясы x_0 нүктесінің маңында анықталған болсын. Егер $x = x_0$ нүктесінде осы функция графигіне жанама жүргізу мүмкін болса, онда осы жанама теңдеуін жазу керек. Ол үшін, алдымен қисыққа жүргізілген жанама түсінігін анықтап алайық . $y=f(x)$ функциясының графигінен $M_0(x_0; f(x_0))$ және $M(x; f(x))$ нүктелерін алайық . Онда M_0M түзу осы қисыққа жүргізілген *қиюшы* деп аталады (62-сурет).



2-сурет

Анықтама. *Қисық бойымен M нүктесі M_0 нүктесіне ұмтылғандығы M_0 M қиюшысының алатын шектік түзуін y=f(x) функциясының графигіне x=x $_0$ нүктесінде жүргізілген* ***жанама*** *деп атайды.*

Осы анықтама *M* нүктесі M_0 нүктесіне ұмтылады ($M \to M_0$) дегеннің орнына $x \to x_0$ болса, онда $M(x; f(x)) \to M_0(x_0))$ болатыны түсінікті және керісінше, $M \to M_0$ шартынан $x \to x_0$ шарты шығады.

Енді M_0M түзуінің теңдеуін жазайық . Егер $(X;Y)$ арқылы M_0M түзуінің кез келген нүктесінің координаталарын белгілесек, онда екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі бойынша

$$\frac{X - x_0}{x - x_0} = \frac{Y - f(x_0)}{f(x) - f(x_0)}$$

немесе

$$Y - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} * (X - x_0)$$

теңдеуін аламыз. Егер $\Delta x = x - x_0, (x = x_0 + \Delta x)$ деп белгілесек, онда $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ функция өсімшесіне тең болады. Сонда M_0M қиюшысының (4) теңдеуі мына түрде жазылады:

$$Y - f(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta y} * (X - x_0).$$

Онда анықтама бойынша (4) (немесе (4)) теңдеуінен $x \to x_0 (\Delta x \to 0)$ ұмтылғанда жанаманың теңдеуін аламыз: $Y - f(x_0) = k(X - x_0)$. Мұнда $k = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Сонымен қарастырылған екі мысалда $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{\Delta x \to o} \frac{\Delta Y}{\Delta X}$ шегінің маңызды рөл атқаратынын көрдік. Осы шекті функцияның $x - x_0$ нүктесіндегі *туындысы* деп атайды.

1.2 **Функцияның туындысы**

Анықтама.

Айталық , y = f(x) функциясы $x = x_0$ *нүктесінің жанңында анықталсын. Онда, егер* $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *қатынасының* $x \to x_0$ *ұмтылғанда щегі бар болса, онда бұл шекті*

$y = f(x)$ *функциясының* $x = x_0$ *нүктесіндегі* ***туындысы*** *деп атайды.* Оны былай бейгілейді:

$$f(x_0);\ y`;\ \frac{dy}{dx};\ \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Сонымен, $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (f `-«эф штрих» деп оқылады).

Егер $x - x_0 = \Delta x, (x \to x_0 \Rightarrow \Delta x \to 0)$ белгілеуін енгізсек , онда анықтаманы былай жазуға болады: $f`(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Ал, $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ функция өсімшесі екенін ескерсек, онда функция туындысының анықтамасын былай жазамыз: $y` = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$

Ал $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$

функция өсімшесі екенін ескерсек,онда функция туындысының анықтамасын былай жазамыз: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Егер $y = f(x)$ функциясы $(a;b)$ аралығының (мұнда $a = -\infty, b = +\infty$ болуы да мүмкін) әрбір нүктеснде туындысы бар болса, онда бұл функциясы $(a;b)$ аралығында *дифференциалданады* деп атаймыз. Жалпы, функцияның берілген нүктедегі туындысын анықтау процесін функцияны ***диффернциалдау*** деп атайды. Сонымен, егер $x \in (a;b)$ болса, онда (7) тендікпен $(a;b)$ аралығында функция анықталатындығы түсінікті. Бұл $f`(x_0)$ функциясын берілген $f(x)$ функциясының $(a;b)$ аралығындағы туындысы деп атайды.

Енді алдыңғы тақырыпта қарастрылған екі мысалдан туынды ұғымының механикалық және геометриялық мағыналары алынады.

Егер материялдық нүкте $s = s(t)$ заңымен түзу сызық бойымен қозғалатын болса, онда 1-мысал бойынша $t = t_0$ уақытындағы материалдық нүктенің лездік жылдамдығы

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

тендігімен анықталады. Олай болса, $v(t_0) = s'(t_0)$

яғни $s(t)$ жолынан алынған туынды қозғалыс жылдамдығына тең.

Ал 2-мысалдан $y = f(x)$ функциясының $x = x_0$ нүктесінде жүргізілген жанама тендеуі $y - f(x_0) = k(x - x_0)$ түрінде жазылатындығы және жанаманың k бұрыштық коэффициенті

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

формуласымен анықталатының көрдік. Онда функция туындысының анықтамасы бойынша $k = f`(x_0)$. Яғни $y = f(x)$ функциясының $x = x_0$ нүктесіндегі туындысы осы функцияның графигіне $x = x_0$ нүктесінде жүргізілген жанама түзуінің бұрыштық коэффиентіне тең. Егер жанама Оx осінің оң бағытымен a бұрышымен қиылысатын болса, онда $k = tga$ болатынын геометриялық мағынасы анықталады.

Енді туындыны анықтауға бірнеше мысал қарастырайық .

3-мысал. $f(x) = c$ тұрақты функцияның x нүктесіндегі туындысын табу қажет.

Шешуі. Алдымен бұл функцияның өсімшесін анықтайық: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = c - c = 0$.
Сонда $c` = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$. Яғни $c` = 0$, тұрақты функцияның туындысы 0-ге тең.

4- мысал. $f(x) = x$ функциясының туындысын табу керек.

Шешуі. $\Delta y = x + \Delta x - x = \Delta x$.Сонда $x` = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

5-мысал. $f(x) = x^2 - 3x$ функциясының туындысын табу керек.

Шешуі.

$$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) - (x^2 - 3x) = 2x\Delta x - 3\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Осыдан

$$(x^2 - 3x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x - 3\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x - 3 + \Delta x) = 2x - 3.$$

Сонымен, $(x^2 - 3x) = 2x - 3$.

6-мысал. $f(x) = /x/$ функциясының туындысын табу керек.

Шешуі. $/x/ = \begin{cases} x, егер, > 0 \\ -x, егер, x < 0 \end{cases}$

болғандықтан , $x > 0$ жағдайында $|x| = x$. Сондықтан $(|x|)` = 1(x > 0)$.

Егер $x > 0$ болса, онда $f(x) = |x| = -x$, Олай болса, $(|x|)` = -1, (x < 0)$.

Енді бұл функцияның $x = 0$ нүктесінде туындысы болмайтынын көрсетелік. $x = 0$ нүктесінде функцияның өсімшесі

$\Delta y = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x|$ болады. Онда $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ шегі анықталмайды. Өйткені $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1, \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$ яғни $\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ қатынасының сол және оң жақты шектері өзара тең емес.

$$f`(x) = (|x|)` = \begin{cases} 1, егер, x > 0 \\ -1, егер, x < 0 \\ анықталмаған, x = 0 \end{cases}$$

1.3. Функцияның дифференциалы және оның геометриалық мағынасы

Айталық, $y = f(x)$функциясы $x = x_0$ нүктесінде диффренциалданатын болсын. Онда $f`(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ теңдігінен және шектің анықтамасы бойынша

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f`(x_0) + \varepsilon(\Delta x)$$

теңдігін аламыз. Мұнда $\varepsilon(\Delta x)$ - шексіз аз шама: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$. Осыдан (1) теңдікті Δx -ке көбейту арқылы

$$\Delta y = f`(x_0) * \Delta x + \varepsilon(\Delta x) * \Delta x$$

теңдігін аламыз. Сонымен, біз x_0 нүктесінде дифференциаданатын $y = f(x)$ функциясының Δy өсімшесін $\Delta y = A * \Delta x + \varepsilon(\Delta x) * \Delta x, A = f`(x_0), \lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$ түрінде жазуға болатынын көрсеттік.

Енді керісінше, $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі өсімшесін

$$\Delta y = A * \Delta x + \varepsilon(\Delta x) * \Delta x,$$

(мұнда $\varepsilon(\Delta x) \to 0,$ егер $\Delta x \to 0$) түрінде жазу мүмкін болса, онда $y = f(x)$ функциясы $x = x_0$ нүктесінде дифференциалданатын және оның туындысы $f`(x_0) = A$ болатынын көрсетейік. Шынындада, (11) тендікті Δx-ке бөліп, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \varepsilon(\Delta x), \Delta x \to 0$ ұмтылғанда шекке көшейік:

$$f`(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}(A + \varepsilon(\Delta x)) = \lim_{\Delta x \to 0} A + \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = A + 0 = A$$

Сонымен біз мынадай деректі дәлелдедік : $y = f(x)$ функциясы $x = x_0$ нүтесінде дифференциалданатын болса, онда функцияның x_0 нүктесіндегі өсімшесі түрінде жазылады және керісінше, егер функцияның өсімшесі x_0 нүктесінде түрінде жазылса, онда функция осы нүктеде дифференциалданады.

Анықтама. $x = x_0$ *нүктесіндегі* $y = f(x)$ функциясы өсімшесінің Δx*-ке қатысты сызықтық бөлігін функцияның* $x = x_0$ *нүктесіндегі* ***дифференциалы*** *деп атайды.* Оны былай белгілейді: $dy, df(x_0)$. Сонымен,

$$dy = f`(x_0) * \Delta x$$

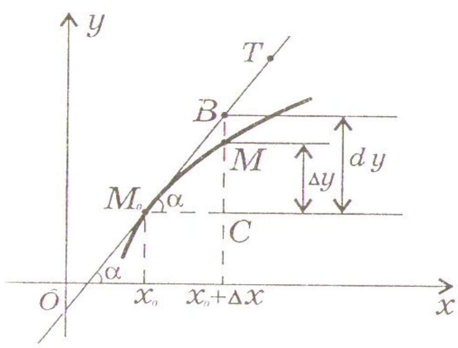
$f(x) = x$ функциясының дифференциалын анықтайық. $f`(x) = (x)` = 1$ болғандықтан, $dx = 1 * \Delta x = \Delta x$. Осыдан аргументтің өсімшесі мен дифференциалы мына түрде жазылады:

$$dy = f`(x_0)dx.$$

Енді дифференциалдың геометриалық мағынасын қарастырайық . $y = f(x)$ функциясының $M_0(x_0; f(x_0))$ нүктесінде M_0T жанамасын жүргізейік. Бұл жанама *0x* осінің оң бағытымен *a* бұрышын жасасын. x_0 нүктесінде Δx өсімшесін берейік. Онда функцияның $\Delta y = MC$ өсімшесін аламыз. BCM_0 тік бұрышты үшьұрышынан $BC = M_0C * tga = \Delta x * tga$ немесе $tga = f`(x_0)$ болатының ескерсе отырып, $BC = f`(x_0) * \Delta x = f`(x_0)dx$ теңдігін аламыз. Онда дифферренциалдың анықтамасы бойынша $dy = BC$ екендігі шығады.

7-мысал. $f(x) = x^2 - 3x$ функциясының $x = 4$ нүтесіндегі дифференциалын табу керек.

Шешуі. Алдыңғы тақырыптағы 5-мысал бойынша $f`(x) = 2x - 3$. Сондықтан берілген функцияның дифференциалы $dy = (2x - 3)dx$ түрінде жазылады. Ал $f`(4) = 2 * 4 - 3 = 5$ болғандықтан, функцияның *x*=4 нүктксіндегі дифференциалы $dy = 5dx$ болады.



3-сурет

Теорема. *Егер* $y = f(x)$ *функциясы* $x = x_0$ *нүктесінде дифференциалданатын болса, онда функция осы нүктеде үздіксіз болады.*

Дәлелдеу. Айталық $y = f(x)$ функциясы $x = x_0$ нүктесінде дифференциалданатын болсын.Онда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ немесе $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$ теңдігі орындалатынын көрсетсек, жеткілікті. Шынында да,

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x \ \ + \Delta x) - f(x \ \ ) = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} * \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x \ \ )}{\Delta x} * \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f`(x_0) * 0 = 0 \ .$$

Дәлелдеу керегі де осы.

2. Есептер шығару

В.А. Подольский, А.М. Суходский.Е.С. Мироненко 2005ж, Москва,194 - бет)

№10.1

Туындының анықтамасын пайдаланып, берілген $y = \sqrt{2x - 1}$ *функциясының туындысын және дифференциалын табыңыз.* $y'(5)$ *есептеңіз*

Шешімі:

Функцияның өсімшесін, сонан соң дифференциалы мен мәнін есептейік:

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \sqrt{2(x + \Delta x) - 1} - \sqrt{2x - 1} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\sqrt{2(x + \Delta x) - 1} - \sqrt{2x - 1}}{\Delta x};$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{2(x + \Delta x) - 1} - \sqrt{2x - 1}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{2x + 2\Delta x - 1} - \sqrt{2x - 1}\right)\left(\sqrt{2x + 2\Delta x - 1} + \sqrt{2x - 1}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{2x + 2\Delta x - 1} - \sqrt{2x - 1}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\Delta x\left(\sqrt{2x + 2\Delta x - 1} - \sqrt{2x - 1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2x - 1}};$$

$$dy = \frac{1}{\sqrt{2x - 1}} dx; \quad y'(5) = \frac{1}{\sqrt{2 \bullet 5 - 1}} = \frac{1}{3}$$

БАҚЫЛАУ СҰРАҚТАРЫ:

1. **.** Функцияның туындысы және дифференциалының анықтамасын жазыңыз.

 1.1 Функция туындысына келтірілетін физикалық мысалдарын атаңыз.

 1.2 Функцияның туындысының анықтамасын шек арқылы жазыңыз.

 1.3 Функцияның дифференциалы және оның геометриалық мағынасын сызба жұмысында көрсетіңіз.

ПАЙДАЛАНҒАН ӘДЕБИЕТ:

В.А. Подольский, А.М. Суходский.Е.С. Мироненко 2005ж, Москва, 198 – бет.